全品

教辅图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年创始人专注教育行业

全品学练考

AI智慧教辅

主编 肖德好

导学案

高中数学

基础版

选择性必修第三册 RJA

本书为AI智慧教辅

“讲课智能体”支持学生聊着学，扫码后哪里不会选哪里；随时随地想聊就聊，想问就问。

长江出版传媒
崇文书局

CONTENTS 目录 | 导学案

第六章 计数原理

6.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

第 1 课时 两个计数原理及简单应用

【学习目标】

1. 通过实例，能归纳总结出分类加法计数原理、分步乘法计数原理.
2. 正确地理解“完成一件事情”的含义，能根据具体问题的特征，选择“分类”或“分步”.
3. 能根据具体问题的特征，选择两种计数原理解决一些实际问题，发展数学建模和数学运算的核心素养.

课堂明新知 知识导学 典例探究

◆ **要点一 分类加法计数原理**

新知构建

定义：完成一件事有________不同方案，在第 1 类方案中有________种不同的方法，在第 2 类方案中有________种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=$________种不同的方法.

如果完成一件事情有 n 类不同方案，在第 $k(k=1,2,\cdots,n)$类中有 a_k 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=$________________种不同的方法.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)在分类加法计数原理中，两类不同方案中的方法可以相同. ( )

(2)在分类加法计数原理中，每类方案中的方法都能完成这件事. ( )

典例解析

例 1 (1)[教材 P5T1(1)改编] 一项工作可以用两种方法完成，有 4 人只会用第一种方法完成，有 3 人只会用第二种方法完成，另有 2 人两种方法都会，从中选择 1 人完成这项工作，则不同选法的种数是________.

(2)在所有的两位数中，个位数字大于十位数字的两位数的个数为________.

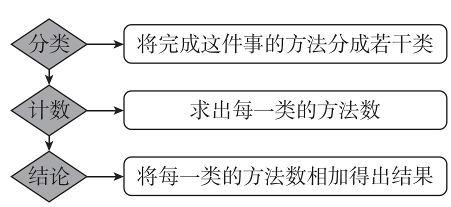
变式 某市的有线电视可以接收中央台 12 个频道、本地台 10 个频道和其他省市 46 个频道的节目.

(1)当这些频道播放的节目互不相同时，一台电视机共可以选看多少个不同的节目？

(2)如果有 3 个频道正在转播同一场球赛，其余频道正在播放互不相同的节目，一台电视机共可以选看多少个不同的节目？

[素养小结]

利用分类加法计数原理计数时的解题流程



[提醒] (1)确定分类标准时要确保每一类都能独立地完成这件事.

(2)检查所分类型是否包含所有情况，确保不重不漏.

◆ 要点二　分步乘法计数原理

新知构建

定义:完成一件事需要________步骤,做第 1 步有________种不同的方法,做第 2 步有________种不同的方法,那么完成这件事共有 $N=$________种不同的方法.

如果完成一件事情需要 n 个步骤,做第 $k(k=1,2,\cdots,n)$步有 a_k 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N=$________________种不同的方法.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)在分步乘法计数原理中,每个步骤中完成这个步骤的方法是各不相同的.　　(　　)

(2)在分步乘法计数原理中,事情如果是分两步完成的,那么其中任何一个单独的步骤都不能完成这件事,只有两个步骤都完成后,这件事情才算完成.　　(　　)

典例解析

例 2 (1)[2025·四川南充高二期中] 现有 3 个班分别从 3 个景点中选择 1 个游览,不同选法的种数是　　(　　)

A. 27　　B. 9

C. 3　　D. 1

(2)[2025·天津河北区高二期中] 在高二某班级中,有 4 名同学要参加足球、篮球、乒乓球三项比赛,每人仅选择一项参加,其中甲同学无法参加足球比赛,则不同的参加方法种数为　　(　　)

A. 12　　B. 16

C. 54　　D. 81

变式 (1)若 4 名学生报名参加数学、计算机、航模兴趣小组,每人选报 1 项,则不同的报名方式有　　(　　)

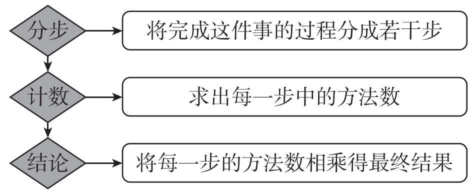
A. 3^4 种　　B. 4^3 种

C. $3\times2\times1$ 种　　D. $4\times3\times7$ 种

(2)人们习惯把最后一位是 6 的多位数叫作"吉祥数",则无重复数字的四位"吉祥数"(首位不能是零)共有________个.

[素养小结]

利用分步乘法计数原理计数时的解题流程



[提醒] (1)要按照事件发生的过程合理分步.

(2)分步时要注意各步骤互相依存,不能遗漏步骤,只有各步骤都完成才算完成这件事.

◆ 要点三　两个计数原理的简单应用

例 3 [教材 P5 例 3 改编] 高二(1)班有 6 人参加数学小组,(2)班有 5 人参加物理小组,(3)班有 4 人参加化学小组.

(1)选其中 1 人担任数理化小组组长,有多少种不同的选法?

(2)每班选 1 人参加全国数理化竞赛,有多少种不同的选法?

(3)选取其中 2 人参加不同的学科竞赛,有多少种不同的选法?

变式 高二(1)班、(2)班、(3)班分别有7,5,9名学生参加创新技能大赛笔试.

(1)如果选一人当组长,那么有多少种不同的选法?

(2)如果老师任组长,每班选一名副组长,那么有多少种不同的选法?

(3)如果推选2名学生参赛,要求这2人来自不同的班级,那么有多少种不同的选法?

[素养小结]

利用两个计数原理解题时的三个注意点

(1)当题目无从下手时,可考虑要完成的这件事是什么,即怎样做才算完成这件事,然后给出完成这件事的一种或几种方法,从这几种方法中归纳出解题方法.

(2)分类时标准要明确,做到不重不漏,有时要恰当画出示意图或树状图,使问题的分析更直观、清楚,便于探索规律.

(3)综合问题要考虑是先分类还是先分步.

第2课时 两个计数原理的综合应用

课堂明新知

知识导学 典例探究

◆ 要点一 数字组数问题

例1 用0,1,2,3,…,9这十个数字.

(1)可组成多少个三位数?

(2)可组成多少个无重复数字的三位数?

(3)可组成多少个小于500且没有重复数字的自然数?

变式 [2025·江苏扬州高二期中] 用0,1,2,3,4,5,6这七个数字.

(1)可以组成多少个无重复数字的四位偶数?

(2)选出一个偶数和三个奇数,组成无重复数字的四位数,这样的四位数共有多少个?

[素养小结]

解决组数问题的方法

(1)对于组数问题,一般按特殊位置(一般是末位和首位)优先的方法分类或分步完成;如果正面分类较多,可采用间接法从反面求解.

(2)解决组数问题,应特别注意其限制条件,有些条件是隐藏的,要善于挖掘.组数时,要注意特殊元素、特殊位置优先的原则.

[提醒] 数字"0"不能排在两位数字或两位数字以上的数的最高位.

◆ 要点二 选(抽)取分配问题

例2 现有甲、乙、丙、丁、戊五类不同的书,放入四个窗格的书架中.若甲、乙两类书必须放在同一窗格,丙、丁、戊分别放到剩余三个窗格内,共有多少种放法?

变式 (1)高三年级的三个班级到甲、乙、丙、丁四个工厂进行社会实践,其中甲工厂必须有班级去,则不同的分配方案共有 ( )

A. 16种 B. 18种

C. 37种 D. 48种

(2)将2名女生和3名男生分配到两个不同的兴趣小组,要求每个兴趣小组分配男生、女生各1人,则不同的分法种数为________.

[素养小结]

解决抽取(分配)问题的方法

(1)当涉及对象数目不大时,一般选用枚举法、树状图法、框图法或者图表法.

(2)当涉及对象数目较大时,一般有两种方法:

①直接使用分类加法计数原理或分步乘法计数原理.一般地,若抽取是有顺序的,则按分步进行;若按对象特征抽取,则按分类进行.

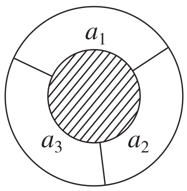
②间接法:去掉限制条件计算所有的抽取方法数,然后减去所有不符合条件的抽取方法数即可.

◆ **要点三　涂色(种植)问题**

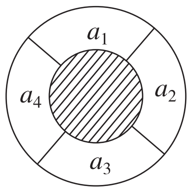
例 3　一个同心圆形花坛分为两部分,中间小圆部分种植草坪和绿色灌木,周围的圆环分为 $n(n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}^*)$ 等份,种植红、黄、蓝三种颜色不同的花,要求相邻两部分种植不同颜色的花.

(1)如图①,圆环分成 3 等份,分别为 a_1,a_2,a_3,则有多少种不同的种植方法?

(2)如图②,圆环分成 4 等份,分别为 a_1,a_2,a_3,a_4,则有多少种不同的种植方法?



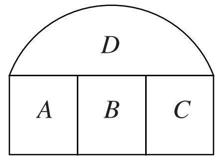
①



②

变式 (1)用 4 种不同的颜色涂在四棱锥的各个面上,要求相邻两面不同色,有________种不同的涂法.

(2)[2025·江西萍乡高二期中] 如图,提供 4 种不同的颜色给图中 A,B,C,D 四块区域涂色,若相邻的区域不能涂同一种颜色,则不同的涂法共有________种.



[素养小结]

求解涂色(种植)问题一般是直接利用两个计数原理求解,常用方法有:

(1)按区域的不同以区域为主分步计数,用分步乘法计数原理分析;

(2)以颜色(种植作物)为主分类讨论,适用于"区域、点、线段"问题,用分类加法计数原理分析;

(3)对于空间中的涂色问题,将空间问题平面化,转化为平面区域涂色问题.

6.2　排列与组合

6.2.1　排列

【学习目标】

1. 通过实例,理解排列的概念,能准确判断排列问题.
2. 能用列举法、树状图写出一个排列问题的所有排列.
3. 能用分类加法计数原理和分步乘法计数原理解决简单的排列问题.

课堂明新知　　知识导学　典例探究

◆ **要点一　排列的概念**

新知构建

(1)排列的定义:一般地,从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素,并按照____________排成一列,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

(2)两个排列相同的充要条件:两个排列的______完全相同,且元素的__________也相同.

注意:由排列的定义可知,排列与元素的顺序有关,这也是判断是否为排列问题的主要依据.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)1,2,3 与 3,2,1 为同一排列.　(　　)

(2)在一个排列中,同一个元素不能重复出现.　(　　)

(3)从 1,2,3,4 中任选两个数字,就组成一个排列.　(　　)

(4)从 5 名同学中任选 2 名同学分别参加数学和物理竞赛的所有不同的选法是一个排列问题.　(　　)

典例解析

例 1 判断下列问题是否是排列问题，并说明理由.

(1)从 1,2,3,4 四个数字中，任选两个做加法，其结果有多少种不同的可能？

(2)从 1 到 10 这十个自然数中任取两个不同的数组成直角坐标平面内的点的坐标，可得到多少个不同的点的坐标？

(3)从十名同学中任选两名同学去学校开座谈会，有多少种不同的选取方法？

(4)某商场有四个大门，若从一个大门进去，购买物品后，再从另一个大门出来，不同的出入方式有多少种？

变式 (多选题)下列问题是排列问题的是 ( )

A. 从 10 个人中选 2 人分别去种树和扫地

B. 从 10 个人中选 2 人去扫地

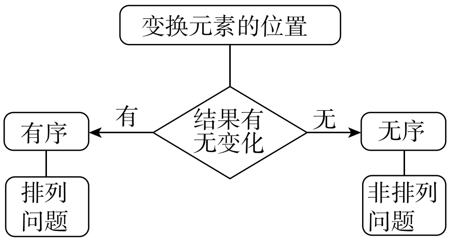
C. 从班上 30 名男生中选出 5 人组成一个篮球队

D. 从数字 5,6,7,8 中任取两个不同的数进行幂运算

[素养小结]

1. 排列中的注意事项:(1)互异性;(2)有序性.

2. 技巧突破



◆ 要点二 用树状图解决排列中的列举问题

例 2 (1)从 1,2,3,4 四个数字中任取两个数字组成没有重复数字的两位数，一共可以组成多少个？

(2)从语文书、数学书、英语书、物理书 4 本书中任意取出 3 本分给甲、乙、丙三人，每人一本，试将所有不同的分法列举出来.

(3)A,B,C,D 四人站成一排，其中 A 不站排头，一共有多少种不同的站法？

变式 (1)由 1,2,3,4 这四个数字组成的首位数字是 1，且恰有三个相同数字的四位数有 ( )

A. 9 个　　B. 12 个

C. 15 个　　D. 18 个

(2)元旦来临之际，某寝室四名同学各有一张贺卡，并且要送给该寝室的其中一名同学，每人都必须得到一张，则不同的送法有 ( )

A. 6 种　　B. 9 种

C. 11 种　　D. 23 种

[素养小结]

利用树状图法解决简单排列问题的适用范围及策略

(1)适用范围:树状图在解决排列元素个数不多的问题时，是一种比较有效的表示方式.

(2)策略:在操作中先将元素按一定顺序排出，然后以先安排哪个元素为分类标准进行分类，再安排第二个元素，并按此元素分类，依次进行，直到完成一个排列，这样能做到不重不漏，然后再按树状图写出排列.

◆ 要点三　用计数原理解决排列问题

例 3 (1)[教材 P16 例 1 改编] 从 7 本不同的书中选出 3 本送给 3 位同学,每人一本,不同的选法种数是 (　　)

A. 3^7　　B. 7^3

C. 21　　D. 210

(2)[2025·深圳罗湖区高二期中] 从 A,B,C 等 7 人中选 5 人排成一排,若 A 必须在内,则有________种排法.(用数字作答)

变式 某中学环保社团计划利用社团前空地栽种五棵高矮不一样的树木,其中最高和最矮的两棵树木种在两头的方法有 (　　)

A. 6 种　　B. 12 种

C. 24 种　　D. 48 种

[素养小结]

1. 先判断是不是排列问题.

2. 在排列个数较多且明确需要完成的事情的情况下,可采用分类加法计数原理或分步乘法计数原理解决.

6.2.2　排列数

第 1 课时　排列数及简单应用

【学习目标】

1. 理解排列数公式,能利用排列数公式进行计算和证明.
2. 进一步理解排列的概念,掌握一些排列问题的常用解决方法.
3. 能应用排列知识解决实际问题.

课堂明新知　　知识导学　典例探究

◆ 要点一　用排列数公式进行化简与证明

新知构建

排列数定义及表示	把从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有________________,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数,用符号 A_n^m 表示	
全排列的概念	把 n 个不同的元素________的一个排列	
阶乘的概念	正整数 1 到 n 的连乘积,叫作 n 的阶乘,用 $n!$ 表示	
排列数公式	$A_n^m=$__________________________	
	阶乘式 $A_n^m=$________$(n,m\in\mathbf{N}^*,m\leqslant n)$	
特殊情况	$A_n^n=$________,$0!=$________	

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)从 $n(n\geqslant 2)$ 个人中选出 2 个人,分别从事两项不同的工作,可以用 A_n^2 表示. (　　)

(2)集合 $P=\{x\mid x=A_4^m,m\in\mathbf{N}^*\}$,则 m 的取值个数是 4. (　　)

(3)将 8 名同学排成两排,每排 4 人,则不可以用 A_8^8 表示. (　　)

(4)$n!=\dfrac{(n+1)!}{n+1}$. (　　)

(5)$A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$. (　　)

典例解析

例 1 [教材 P19 例 3 改编] 计算:(1)A_{10}^4;(2)$A_9^4-A_9^3$;(3)$\dfrac{A_{12}^8}{A_{12}^7}$;(4)$\dfrac{A_{10}^2A_7^7}{10!}$.

变式 (1)$A_6^6-6A_5^5+5A_4^4=$________.

(2)$(x-2)(x-3)(x-4)\cdots(x-15)(x\in \mathbf{N}_+,x>15)$可表示为 ( )

A. A_{x-2}^{13} B. A_{x-2}^{14}

C. A_{x-15}^{13} D. A_{x-15}^{14}

例 2 (1)解方程:$A_{2n}^3=28A_n^2$.

(2)求证:$A_{n+1}^{n+1}-A_n^n=n^2A_{n-1}^{n-1}$.

变式 (1)满足 $3A_x^3=2A_{x+1}^2+6A_x^2$ 的 x 的值为________.

(2)求证:$A_n^m=nA_{n-1}^{m-1}(m,n\in \mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant m\geqslant 2)$.

[素养小结]

1. 排列数的计算方法

(1)排列数的计算主要是利用排列数的乘积公式进行,连续正整数的积可以写成某个排列数;

(2)应用排列数公式的阶乘形式时,一般写出它们的式子后,再提取公因式.

2. 排列数的化简与证明技巧

应用排列数公式可以对含有排列数的式子进行化简和证明,化简的过程中要对排列数进行变形,并要熟悉排列数之间的内在联系.解题时要灵活地运用如下变式:

①$n!=n(n-1)!$;②$A_n^m=nA_{n-1}^{m-1}$;

③$n\cdot n!=(n+1)!-n!$;④$\dfrac{n-1}{n!}=\dfrac{1}{(n-1)!}-\dfrac{1}{n!}$.

[提醒] 在解含有排列数的方程或不等式时,必须注意 A_n^m 中 $m\in \mathbf{N}^*$,$n\in \mathbf{N}^*$ 且 $m\leqslant n$ 这些限制条件.在解出方程或不等式后,要进行检验,把不合题意的解舍掉.

◆ 要点二 排列数公式的简单应用

例 3 (1)将 5 个不同的球放入 8 个不同的盒子中,每个盒子里至多放 1 个球,则不同的放法有 ( )

A. A_8^5 种 B. C_8^5 种

C. 5^8 种 D. 8^5 种

(2)[2025·浙江台州高二期末] 由 1,2,3,4 四个数字组成无重复数字的四位偶数有 ( )

A. 4^4 个 B. 24 个

C. 12 个 D. 6 个

变式 (1)[教材 P20T3 改编] 10 个人走进只有 6 把不同椅子的屋子,若每把椅子必须且只能坐一人,则不同坐法的种数为 ( )

A. 6 B. A_{10}^6

C. 10^6 D. 6^{10}

(2)[2025·北京顺义区高二期中] 某班周一上午共有四节课,计划安排语文、数学、美术、体育各一节,要求数学不排在第一节和第四节,则该班周一上午不同的排课方案共有 ( )

A. 24 种 B. 18 种

C. 12 种 D. 6 种

第 2 课时　排列的综合问题

课堂明新知

知识导学　典例探究

◆ 要点一　特殊元素(位置)问题

例 1　有 5 名同学站成一排拍照.

(1)甲、乙必须站一起,共有多少种不同的排法?

(2)最左端只能排甲或乙,且最右端不能排甲,共有多少种不同的排法?

(3)甲必须站正中间,并且乙、丙不能相邻,共有多少种不同的排法?

变式　[2025·江苏苏州高二期末] 一场晚会有 4 个演唱节目和 2 个舞蹈节目,要求排出一个节目单.

(1)2 个舞蹈节目不排在开始和结尾,有多少种排法?

(2)前三个节目要有舞蹈节目,有多少种排法?

[素养小结]

处理有特殊元素的排列问题常从以下两方面入手:

(1)从特殊元素入手,先给特殊元素安排位置,再把其他元素安排在其他位置上;

(2)从位置入手,先安排特殊位置,再安排其他位置.

如果直接分类情况较多,那么可采用间接法求解.

◆ 要点二　相邻与不相邻问题

例 2　甲、乙、丙、丁、戊五名同学站成一排拍照.

(1)甲、乙两人不相邻的站法共有多少种?

(2)甲不站排头或排尾,且甲、乙两人相邻的站法共有多少种?

变式 [2025·山东枣庄高二期中] 有4名男同学和3名女同学(甲、乙、丙)站成一排.

(1)3名女同学必须排在一起,有多少种不同的排法?

(2)任何2名女同学都不相邻,有多少种不同的排法?

(3)甲、乙两人相邻,但都不与丙相邻,有多少种不同的排法?

[素养小结]

(1)元素相邻问题一般用"捆绑法",先把相邻的若干个元素"捆绑"为一个大元素与其余元素全排列,然后再松绑,将这若干个元素内部全排列.

(2)元素不相邻问题一般用"插空法",先将不相邻元素以外的"普通"元素全排列,然后在"普通"元素之间及两端形成的空中插入不相邻元素.

◆ 要点三　定序问题

例3 将A,B,C,D,E这5个字母排成一列,要求A,B,C在排列中的顺序为"A,B,C"或"C,B,A"(可以不相邻),有多少种不同的排列方法?

变式 7人站成一排.

(1)甲必须在乙的左边(不一定相邻),有多少种不同的排法?

(2)甲、乙、丙三人自左向右的顺序不变(不一定相邻),有多少种不同的排法?

[素养小结]

在有些排列问题中,某些元素的前后顺序是确定的,解决这类问题的基本方法有两个:

(1)整体法,即若有$(m+n)$个元素排成一列,其中m个元素之间的先后顺序确定不变,将这$(m+n)$个元素排成一列,有A_{m+n}^{m+n}种不同的排法;然后任取一个排列,固定其他n个元素的位置不动,把这m个元素交换顺序,有A_m^m种排法,其中只有一个排列是我们需要的,因此共有$\frac{A_{m+n}^{m+n}}{A_m^m}$种满足条件的不同排法.

(2)插空法,即m个元素之间的先后顺序确定不变,因此先排这m个元素,只有一种排法,然后把剩下的n个元素分类或分步插入由以上m个元素形成的空中.

6.2.3　组合

6.2.4　组合数

第1课时　组合与组合数公式

【学习目标】

1. 通过实例，理解组合的意义，并能写出一些简单问题的所有组合.
2. 理解组合数的概念.
3. 学会运用组合的概念，分析简单的实际问题.
4. 会应用组合数公式及性质求值、化简和证明.
5. 能解决有关组合的实际问题.

课堂明新知

知识导学　典例探究

◆ 要点一　组合的概念

新知构建

1. 组合的定义：一般地，从________个不同元素中取出________($m\leqslant n$)个元素__________，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

2. 排列与组合的异同点：

	排列	组合
相同点	从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$个元素	
不同点	与元素的顺序______	与元素的顺序______

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)两个组合相同的充要条件是其中的元素完全相同.　(　　)

(2)从 a,b,c 三个不同的元素中任取两个元素的一个组合是 a,b 或 a,c 或 b,c.　(　　)

(3)“从甲、乙、丙 3 名同学中选出 2 名去参加某两个乡镇的社会调查，有多少种不同的选法”是组合问题.　(　　)

(4)“现将 4 枚相同的抗战胜利纪念币送给 10 人中的 4 人留念，有多少种送法”是排列问题.(　　)

(5)“abc”与“bca”是相同的排列，不是相同的组合.　(　　)

典例解析

例 1　判断下列问题是组合问题还是排列问题.

(1)若集合 $A=\{a,b,c,d\}$，则集合 A 的含有 3 个元素的子集有多少个？

(2)某铁路线上有 4 个车站，则这条铁路线上需准备多少种车票？

(3)从 10 个人中选出 3 个人为代表去开会，有多少种选法？

(4)三个人去做 5 种不同的工作，每人做 1 种，有多少种分工方法？

(5)把 3 本相同的书分给 5 名学生，每人最多得一本，有多少种分配方法？

变式 (多选题)下列问题是组合问题的是　(　　)

A. 把 5 本不同的书分给 5 名学生，每人一本

B. 从 7 本不同的书中取出 5 本给某个同学

C. 10 个人相互发微信，共发几次微信

D. 10 个人互相通一次电话，共通了几次电话

[素养小结]

区分排列与组合的方法

首先弄清楚事件是什么,区分的标志是有无顺序,而区分有无顺序的方法是:把问题的一个选择结果写出来,然后交换这个结果中任意两个元素的位置,看是否会产生新的变化,若有新变化,则说明有顺序,是排列问题;若无新变化,则说明无顺序,是组合问题.

◆ 要点二　用组合数公式进行化简与证明

新知构建

组合数定义	从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的__________的个数,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数	
表示法	________	
组合数公式	乘积式	$C_n^m=$________$=$__________
	阶乘式	$C_n^m=$________
性质	$C_n^m=$________,$C_{n+1}^m=$__________	
备注	①$n,m\in\mathbf{N}^*$ 且 $m\leqslant n$;②规定:$C_n^0=1$	

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)从 a,b,c 三个不同的元素中任取两个元素的一个组合是 C_3^2.　(　　)

(2)$C_5^3=5\times4\times3=60$.　(　　)

(3)从 1,3,5,7 中任取两个数相乘可得 C_4^2 个积.　(　　)

典例解析

例 2 (1)计算:$C_{10}^4-C_7^3\cdot A_3^3$.

(2)计算:$C_{3n}^{38-n}+C_{21+n}^{3n}$.

(3)计算:$C_3^3+C_4^3+\cdots+C_{10}^3$.

例 3 [教材 P25T2 改编] 证明:(1)$mC_n^m=nC_{n-1}^{m-1}$;

(2)$C_{m+2}^n=C_m^n+2C_m^{n-1}+C_m^{n-2}$.

[素养小结]

进行组合数的相关计算时,注意以下几点:

(1)像排列数公式一样,公式 $C_n^m=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$ 一般用于计算;而公式 $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ 及 $C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}$ 一般用于证明、解方程(不等式)等.

(2)要注意公式 $C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}$ 的逆向运用,如例 2(1)中可利用"$C_7^3A_3^3=A_7^3$"简化计算过程.

(3)在解决与组合数有关的问题时,要注意隐含条件"$m\leqslant n$ 且 $m,n\in\mathbf{N}^*$"的运用.

(4)例 2(1)所推导的结论"$mC_n^m=nC_{n-1}^{m-1}$"以及它的变形公式是非常重要的公式,应熟练掌握.

◆ 要点三　简单的组合问题

例 4 [2025·重庆渝中区高二期中] 从 3 名男同学和 5 名女同学中选择 4 名同学去参加志愿者活动.

(1)共有多少种不同的选法?

(2)既有男同学又有女同学的选法有多少种?

变式 ［教材 P25 例 7 改编］从含有 3 件次品的 10 件产品中,任意抽取 4 件进行检验.

(1)抽出的产品都是合格品的抽法有多少种?

(2)抽出的产品中恰好有 2 件是次品的抽法有多少种?

(3)抽出的产品中至多有 2 件是次品的抽法有多少种?

[素养小结]

简单的组合问题的解题思路及注意点:

(1)解简单的组合问题时,首先要判断它是不是组合问题,排列问题与元素顺序有关,而组合问题与元素的顺序无关.

(2)在分类和分步时,一定要注意有无重复或遗漏.

第 2 课时　组合的综合应用

课堂明新知

知识导学　典例探究

◆ 要点一　有限制条件的组合问题

角度 1　“含有”与“至少”问题

例 1 有男运动员 6 名,女运动员 4 名,其中男、女队长各 1 名. 选派 5 人外出比赛,按下列要求分别有多少种选法?

(1)男运动员 3 名,女运动员 2 名;

(2)至少有 1 名女运动员;

(3)至少有 1 名队长;

(4)既有队长,又有女运动员.

变式 蓝天救援队有男救援员 8 名,女救援员 4 名,现选派 5 名救援员参加一项救援.

(1)若男救援员甲与女救援员乙必须参加,共有多少种不同的选法?

(2)若救援员甲、乙均不能参加,共有多少种不同的选法?

(3)若至少有一名男救援员和一名女救援员参加,共有多少种不同的选法?

[素养小结]

有限制条件的抽(选)取问题,主要有两类:

(1)"含"与"不含"问题,常用直接分步法,即"含"的先取出,"不含"的可把所指元素去掉再取,分步计数.

(2)"至多"与"至少"问题,有两种解题思路:一是直接分类法,但注意分类要不重不漏;二是间接法,注意找准对立面,确保不重不漏.

角度2 "多面手"问题

例2 有11名外语翻译人员,其中5名英语翻译员,4名日语翻译员,另外2名英语、日语都精通,从中找出8人,使他们可以组成2个翻译小组,其中一组4人翻译英语,另外一组4人翻译日语,且这2个小组能同时工作,则这样的8人名单共有多少种?

变式 有6名工人,其中2人只会电工,3人只会木工,还有1人既会电工又会木工,若要选出电工2人、木工2人,且这4人能同时工作,则共有________种不同的选法.

[素养小结]

多面手问题以元素作为分析对象,按照选用几个多面手,多面手做什么建立分类讨论的标准,并且要注意做到不重复不遗漏.

◆ 要点二 分组、分配问题

角度1 不同元素分组、分配问题

例3 按下列要求分配6本不同的书,分别有多少种不同的分配方法?

(1)分成3份,1份1本,1份2本,1份3本;

(2)甲、乙、丙三人中,一人得1本,一人得2本,一人得3本;

(3)平均分成3份,每份2本;

(4)平均分配给甲、乙、丙三人,每人2本;

(5)分成3份,1份4本,另外2份每份1本;

(6)甲、乙、丙三人中,一人得4本,另外两人每人得1本.

变式 有9件不同的玩具，求符合下列条件的分配方案的种数.

(1)平均分成三堆；

(2)按数量分为2,2,2,3四堆；

(3)分给甲、乙、丙三个人，甲得2件，乙得3件，丙得4件；

(4)分给甲、乙、丙三个人，一人得2件，一人得3件，一人得4件.

角度2　相同元素分组、分配问题

例4 6个相同的小球放入4个编号为1,2,3,4的盒子中，求下列问题中不同放法的种数.

(1)每个盒子都不空；

(2)恰有1个空盒子；

(3)恰有2个空盒子.

变式 某校准备参加高中数学联赛，把 16 个选手名额分配到高三年级的 1，2，3，4 四个班，每班至少 1 个名额.

(1)不同的分配方案共有多少种？

(2)若每班名额不少于该班的序号数，则不同的分配方案共有多少种？

[素养小结]

(1)不同元素分组问题属于“组合”问题，常见的分组问题有三种：

①完全均匀分组，每组的元素个数均相等，均匀分成 n 组，最后必须除以 $n!$；

②部分均匀分组，应注意不要重复，有 n 组均匀，最后必须除以 $n!$；

③完全非均匀分组，这种分组不考虑重复现象.

(2)相同元素分配问题的处理策略

①隔板法：将放有小球的盒子紧挨着成一行放置，便可看作排成一行的小球的空隙中插入了若干隔板，相邻两块隔板形成一个“盒”. 每一种插入隔板的方法对应着小球放入盒子的一种方法，此法称为隔板法. 隔板法专门解决相同元素的分配问题.

②将 n 个相同的元素分给 m 个不同的对象($n\geqslant m$)，每个对象至少分得一个元素，有 C_{n-1}^{m-1} 种方法. 可描述为 $n-1$ 个空中插入 $m-1$ 块板.

6.3 二项式定理

6.3.1 二项式定理

【学习目标】

1. 能用计数原理证明二项式定理.
2. 掌握二项式定理及二项展开式的通项.
3. 能解决与二项式定理有关的简单问题.

课堂明新知 知识导学 典例探究

◆ 要点一 二项式定理及相关概念

新知构建

二项式定理	$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n(n\in\mathbf{N}^*)$
二项展开式	公式右边的多项式
二项式系数	公式右边各项的系数________
二项展开式的通项	$T_{k+1}=$________

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)$(a+b)^n$ 的展开式中共有 n 项. ( )

(2)二项式 $(a+b)^n$ 与 $(b+a)^n$ 的展开式的第 $r+1$ 项一定相同. ( )

(3)$C_n^ka^{n-k}b^k$ 是 $(a+b)^n$ 的展开式的第 k 项. ( )

(4)$(a-b)^n$ 与 $(a+b)^n$ 的二项展开式的二项式系数相同. ( )

典例解析

例 1 利用二项式定理展开下列各式：

(1)$(a+2b)^5$；

(2)$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^7$.